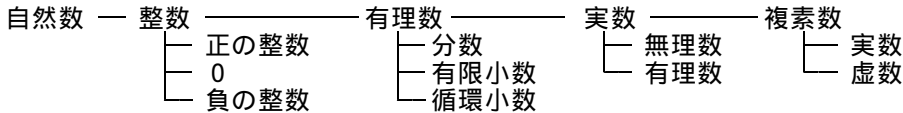


ESライブラリ&& ゲームプログラミング

数学基礎入門 - 数

数

数とは、量を表す概念です。コンピューターなどの分野では、数値や値などとも呼ばれます。数は、以下のように、ものの個数を表すために考え出された自然数から、整数、実数、複素数へと拡張されてきました。



自然数

自然数(natural number)は、1, 2, 3, 4...のように、1ずつ増えていく数の総称です。個数や順番を表すために考え出されました。ものがない状態の「0」を含める場合と含めない場合があります。

(0), 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...

もともとは、ものがない状態は「ない」とすればよかったため、0を含めませんでした。その後、0が発明され、さらに0の計算上での扱い方法が体系化され、0を含める場合も出てきました。現在でも2つが混在しており、含めるのかどうか、明示されていることがあります。

整数

整数(integer)とは、「0」と、「0」に1ずつ足して得られる数、および「0」から1ずつ引いて得られる数の総称です。自然数を逆方向にも拡張した数といえます。0より大きい整数を正の整数、0より小さい整数を負の整数と呼びます。負の整数は、自然数にマイナスの符号 '-' を付けます。また、0と正の整数を合わせて「非負整数」「負でない整数」と呼ぶこともあります。

... - 7, - 6, - 5, - 4, - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...

自然数に負の数を合わせたものですが、この拡張により、小さい数から大きい数が引けるようになりました。さらに、借金や赤字などの「足りない状態」を表すこともできます。ただし、0や負の数は、概念的な存在ともいえ、実際に(個数などで)見ることはできません。そのため負の整数は、当初は何の役にも立たないものと思われていました。

有理数

有理数(rational number)とは、二つの整数を用いた分数(ただし分母が0でない)によって表せる数のことをいいます。分母を1にした有理数が整数ともいえます。さらに、分数が具体的にどんな数なのかを1より細かい位を用いて表す小数があります。整数と整数の間を埋める数といえます。

なお、分数は、必ずいつかは割り切れる有限小数とどこかで同じ数字の並びが循環される循環小数のどちらかになります。

$\frac{1}{3}$ $\frac{10}{31}$ 5.655 0.333

有理数が発明されたことにより、割り算ができるようになりました。そのなかで分数は、(割ったときの数が具体的にわからなくても)ものの割合や比が一目でわかるという利点があります。また小数は、ある整数と別の整数の間の「細分できる量」を表すことができ、微妙な長さや重量、さらには割合や平均を表現するのにとても便利です。

実数

実数(real number)とは、有理数と、分数で表すことができない数(つまり循環しない小数、場合によっては数式でも表せない数)の無理数をあわせた数のことで、(下の虚数をのぞいた)すべての数の総称です。無理数は、有理数と有理数の間を埋める存在といえ、無理数が導入されたことですべての数をとぎれなく連続して表現できるようになりました。また、ほとんどの実数は無理数であるともいえます。

分数で表せない数(無理数)

3の平方根 円周率 自然対数の底 e など

実数という言葉は、次の複素数の概念が考え出された際、これまでの「普通の数」を表すために考え出されました。

複素数

複素数(complex number)とは、実数および虚数の総称で、実数 a 、 b と虚数単位 i を用いて

$$a + b i$$

の形で表すことのできる数のことです。ここで、 b が 0 のときは「 $b i$ 」の部分が 0 になり虚数単位がなくなるため実数、 b が 0 でない場合を虚数(imaginary number)といいます。

虚数単位「 i 」とは、2乗して -1 になる数、つまり -1 の平方根のことです。虚数単位を使うたびに $\sqrt{-1}$ と書くのは面倒なので、"imaginary number"の頭文字を取り、 i と表しています。電気分野では、 i は電流を表すため、代わりに j を用います。

実数は2乗すれば必ず0以上の数になるため、虚数単位は実数の中には存在しません。虚数は、負の数でもなければ、0でもなく、正の数でもないのです。それらの狭間に存在するかのごとく振る舞います。2乗すると0以上になる数が実数、0未満になる数が虚数といえます。

虚数という言葉自体は、中国から由来した言葉です。英語の"imaginary number" 想像数、架空の数を直接的に表しているとは必ずしもいえずイメージすることも難しいため、虚数は非常にわかりにくく何の役にも立たないと思われがちな存在です。しかし、回転や波を扱う分野、たとえば電気・電子工学、電磁気学、量子力学、そして3Dグラフィクスなどでは、非常に便利な概念なのです。

そもそも、自然数以外の数、つまり0も負の数も虚数も、概念のみの存在であり、実際にものを並べたりなどして確認することが難しいのです。そういった意味では、負の数も虚数も同じ架空の存在であるとも考えることもできます。

自然数から実数への拡張は、同じ軸の上で行われてきました。自然数を逆方向へ拡張した整数、整数の間を埋めた有理数、有理数の間を埋めた無理数 - といったように、数と数の間が埋められてきました。無理数によりすべての数を埋め尽くし、横方向への拡張は終わったと考えられます。次に行き着いたのが、数を縦軸方向へ拡張するための虚数です。この軸の違いが、実数との決定的な違いです。

実数は、なんらかの数の並びで表せるため、本来は存在しない負の数も、無限に続く無理数も、具体的なイメージがわきます。虚数は、実数では表せず、これまでの常識を覆す縦軸的な存在のため、イメージがわきにくいのかもかもしれません。

